Vorlesung 15

Von Satz 5.4.6

bis Ende Kapitel 5

Vom letzten Mal... $\mathcal{T}$

Satz 5.4.5 *(i)* $\emptyset \in \mathcal{T}$ *und* $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$;

(ii) Gegeben eine beliebige (nicht unbedingt endliche) Familie von offenen Mengen $\{A_i \in \mathcal{T}, i \in I\}$, *dann ist* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$;

(iii) Gegeben eine endliche Familie von offenen Mengen $\{A_j, j \in J\}$ *mit* $|J| = k \in \mathbb{N}$, *dann ist* $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$.

Warum gilt (iii) nicht für eine <u>unendliche</u> Familie von offenen Mengen?

<u>Beispiel 1</u>: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overset{\subseteq \mathbb{R}}{\left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)} = \{0\}$

und $\{0\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$

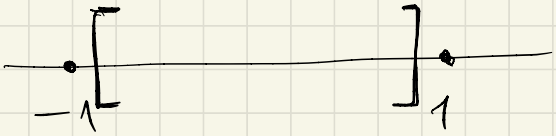
Satz 5.4.6 *(i) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$;*

(ii) Gegeben eine beliebige (nicht unbedingt endliche) Familie von abgeschlossenen Mengen $\{A_i,\ i \in I\}$, dann ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen;

(iii) Gegeben eine endliche Familie von abgeschlossenen Mengen $\{A_j, j \in J\}$ mit $|J| = k \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcup_{j\in J} A_j$ abgeschlossen.

Warum gilt (iii) nur für <u>endliche</u> Familie von abgeschlossenen Mengen?

<u>Beispiel 2</u> $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}\right] = (-1,1)$



<u>Beweis</u>: Satz 5.4.6

(Hinweis: de Morgansche Gesetze)

$$\bigcup_{i\in I} (A_i^c) = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$$

Definition 5.4.3
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir sagen, dass($A \subseteq D$ **offen in** D ist, falls eine offene Menge U in $\mathbb{R}^n$ existiert, sodass $A = D \cap U$.

<u>Bmk</u> (*) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist immer <u>offen</u> in D

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{offen} \\ \text{in } D}}{D} = \underbrace{D}\cap \underset{\substack{\downarrow \\ \text{offen in } \mathbb{R}^n}}{\mathbb{R}^n}$$

(*) $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ ist immer offen in D

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{offen in} \\ D}}{\emptyset} = D \cap \underset{\substack{\uparrow \\ \text{offene Menge in } \mathbb{R}^n}}{\emptyset}$$

(*) $D = \underbrace{[a,b]} \subseteq \mathbb{R}$

D nicht offen in $\mathbb{R}$ aber
$D \subseteq D$ ist offen in D

(*) $A := [0,1) \subseteq \mathbb{R}$ A ist weder offen noch abg. in $\mathbb{R}$

aber $[0,1)$ ist offen in $\underbrace{[0,+\infty)}_{= D}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{offen} \\ \text{in } D}}{[0,1)} = \underbrace{D} \cap \underbrace{(-1,1)}_{\text{offene Menge in } \mathbb{R}}$$

Satz 5.4.7
Es sei $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f stetig in D genau dann, wenn

$$f^{-1}(U) \text{ ist offen in } D, \text{ für alle } U \text{ offen in } \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}).$$

<u>Beweis</u>

"$\Longrightarrow$" Es sei f eine stetige Funktion in D

Es sei $\mathcal{U}$ offen in $\mathbb{R}$ ($/\ \mathbb{C}\ /\ \mathbb{R}^m$)

Zu zeigen: $f^{-1}(\mathcal{U})$ offen in D

(*) Falls $f^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset$ ist offen ✓

(*) Nehmen wir an, dass $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$

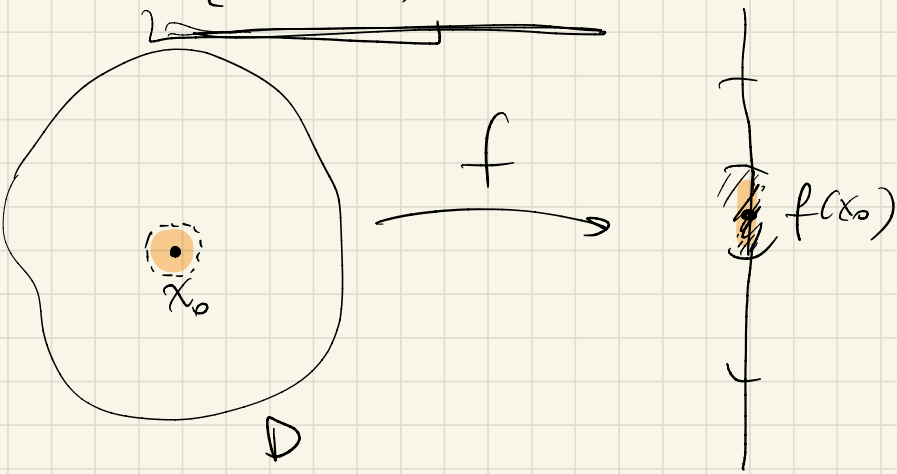
$\Longleftrightarrow$ $f(x_0) \in \mathcal{U}$

$\mathcal{U}$ (n.V.) offen $\Rightarrow$ jeder Punkt ($f(x_0)$) ein innerer Punkt von $\mathcal{U}$ ist $\Rightarrow$

$\varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq \mathcal{U}$

$\mathcal{U}$ (n.V.) offen $\Rightarrow$ jeder Punkt $(f(x_0))$ ein innerer Punkt von $\mathcal{U}$ ist $\Rightarrow$

$\varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq \mathcal{U}$



f stetig in $\underline{x_0}$ $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$
(δ hängt von ε und $\underline{x_0}$ ab) :

$$f\big(\underbrace{\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D}_{\text{offen in } D}\big) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$$

<u>Bmk</u>

(Gegeben $B \subseteq D$ $\quad f^{-1}(f(B)) \supseteq B$)

$$\underbrace{f(\underbrace{\mathcal{U}_\delta(x_0)\cap D})}_{} \subseteq \underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))}_{}$$

$$\underbrace{\mathcal{U}_\delta(x_0)\cap D}_{} \overset{\bullet}{\subseteq} f^{-1}(f(\mathcal{U}_\delta(x_0)\cap D)) \subseteq$$

$$\overset{\bullet}{\subseteq} f^{-1}(\underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))}_{}) \subseteq \underbrace{f^{-1}(\mathcal{U})}_{}$$

$$(B \subseteq C \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(C))$$

Wir haben bewiesen, dass $\forall x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ können wir $\delta\,(=\delta(x_0))$, sodass

$$\underbrace{\mathcal{U}_\delta(x_0)\cap D \subseteq}_{} f^{-1}(\mathcal{U})$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A_i \subseteq B \quad i\in I \\ \Downarrow \\ \bigsqcup_i A_i \subseteq B \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\bigsqcup_{x_0\in f^{-1}(\mathcal{U})} (\mathcal{U}_\delta(x_0)\cap D) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$$

$$\parallel$$

$$\left(\bigsqcup_{x_0\in f^{-1}(\mathcal{U})} \mathcal{U}_\delta(x_0)\right)\cap D \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$$

$$\bigsqcup_{x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})} \left(\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D \right) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$$

$$\parallel$$

$$(*) \quad \left(\bigsqcup_{x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})} \mathcal{U}_\delta(x_0) \right) \cap D \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$$

$$(**) \quad f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})} \{x_0\} \subseteq \bigsqcup_{x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})} \left(\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D \right)$$

D

$$\left(A = \bigsqcup_{x \in A} \{x\} \right)$$

$\rightsquigarrow$ $(*) + (**) \Rightarrow$

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \underbrace{\left(\underbrace{\bigsqcup_{x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})} \mathcal{U}_\delta(x_0)}_{\text{open in } \mathbb{R}^n} \right) \cap D}_{\text{open in } D}$$

"$\Leftarrow$" Angenommen, $f^{-1}(\mathcal{U})$ offen in D ist, für alle $\mathcal{U}$ offen in $\mathbb{R}$

Es sei $x_0 \in D$

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ sodass

$$f(\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$$

$$\underline{\mathcal{U} = \underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))}}$$

Nach Voraussetzung $f^{-1}(\overbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))}^{\mathcal{U}})$ offen in D: $\exists V$ offen in $\mathbb{R}^n$ sodass

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = V \cap D$$

$\underline{x_0} \in f^{-1}(\mathcal{U}) \Rightarrow x_0 \in V$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \mathcal{U}_\delta(x_0) \subseteq V$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D \subseteq V \cap D$$

$$\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D \subseteq V \cap D$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(\mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D)} \subseteq f(\overbrace{V \cap D}^{= f^{-1}(\mathcal{U})}) =$$

$$= f(f^{-1}(\mathcal{U})) \subseteq \mathcal{U} = \underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))}$$

$\blacksquare$

5.4.1: Kompaktheit

Definition 5.4.5
Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **(folgen)kompakt**, falls jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt $x_0 \in K$ konvergiert.

Beispiele:

(1) Ist (a,b) kompakt?

$$\underbrace{b - \frac{1}{n+k}} =: a_n \qquad n \text{ groß genug} \quad a_n \in (a,b)$$

$$(a_n) \subseteq (a,b)$$

$$a_n \to b \notin (a,b)$$

(2) Ist $\underbrace{[0,+\infty)}$ kompakt?

$$(a_n) = (n) \qquad a_n \to +\infty$$

Lemma 5.4.8

Jedes abgeschlossene $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a \leq b$, ist kompakt

Beweis

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \underbrace{[a,b]}_{\text{beschränkt}} \Rightarrow (a_n)$

beschränkt $\underset{\substack{\text{Satz} \\ \text{Bolzano} \\ \text{Weierstraß}}}{\Longrightarrow} \exists\, (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:

$a_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} l$

Zu beweisen: $l \in [a,b] \overset{\text{Lemma 5.4.4}}{\Longrightarrow} l \in [a,b]$

[Lemma 5.4.4: A abg $\Longleftrightarrow$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A wieder in A liegt]

$\blacksquare$

Satz 5.4.9
(Bolzano-Weierstraß) *Es sei K eine abgeschlossene und beschränkte Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist K (folgen)kompakt.*

<u>Beweis</u>

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K.

Zu beweisen: $\exists\ (a_{N_j})_{j\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von (a_n) : $a_{N_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} l \in K$

$a_k \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$

Nehmen wir $(a_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$

<u>Bmk</u>: Falls $(a_k)_k$ beschränkt in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow (a_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$

$$|a_k| = \sqrt{a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \dots + a_{nk}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\sqrt{a_{ik}^2}}_{\substack{\| \\ |a_{ik}|}} \leq \sqrt{a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \dots + a_{nk}^2} = \underbrace{|a_k|}$$

$\forall i$

Also, Falls $R > 0$ $\quad |a_k| \leq R \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_{ik}| \leq R \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i = 1, \dots, n$

$(a_{1k})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt

$\underset{\text{Satz B.W.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Teilfolge von (a_{1k}) die Konvergent ist

$\Rightarrow (a_{1k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}} : a_{1k_\ell} \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} x_1$

$$(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow (a_{2k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$$

beschränkte (Teil)Folge

$\xrightarrow[\text{B.W.}]{\text{Satz}}$ $\exists\ (a_{2k_{\ell_m}})_{m\in\mathbb{N}}$:

$$a_{2k_{\ell_m}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} x_2$$

<u>Bmk.</u> $(a_{1k_{\ell_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von

$(a_{1k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ $\Rightarrow$ Konvergent

$$\underbrace{a_{1k_{\ell_m}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} x_1}$$

$\ldots (a_{3k_{\ell_m}})$

... Wiederholung .....

Wir können eine Teilfolge $a_{N_j} =$

$$= (a_{1N_j}, a_{2N_j}, \dots, a_{nN_j}) \quad j \in \mathbb{N}$$

sodass $\underbrace{a_{iN_j}}_{} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \underbrace{x_i}_{} \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\rightsquigarrow \quad a_{N_j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} (x_1, \dots, x_n) =: l$$

Zu beweisen: $l \in K$

K (nach V.) <u>abgeschlossen</u>

$\Rightarrow$ (<u>Lemma 5.4.4</u>) $\underline{l \in K}$

$\blacksquare$

Satz 5.4.10
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (folgen)kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.

<u>Beweis</u>

- K Kompakt $\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : a_{n_k} \to l \in K \right)$

- (Lemma 5.4.4): $\underline{K \text{ abg}} \iff$ die Grenzwerte von konv. Folgen $\in K$

(a_n) die konvergent ist, also
$\exists\, l \in \mathbb{R}^n : a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in K$

Zu zeigen: $\underline{l \in K}$

$\rightsquigarrow K$ Kompakt $\Rightarrow K$ abg.

- K kompakt $\Rightarrow$ K beschränkt

Indirekter Beweis

$$\underbrace{K \text{ nicht beschränkt}} \Rightarrow K \text{ nicht kompakt}$$

$\Downarrow$ (Übung)

K nicht beschränkt $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\exists\, a_n \in K \;:\; |a_n| \geq n$

und deshalb $\underbrace{|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

$\rightsquigarrow$ können wir keine Teilfolge von (a_n) finden, die konvergent ist

$\blacksquare$

nur $\left[K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Kompakt} \iff K \text{ beschränkt \& abgeschlossen} \right]$

($\rightsquigarrow$ Satz von **Heine-Borel**)

Satz 5.4.12
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann besitzt K ein Maximum und Minimum.

Beweis

K Kompakt $\Rightarrow$ K beschränkt (Satz 5.4.10)

$\mathbb{R}$ Ordnungsvollständig $\Rightarrow$ $\exists \sup(K)$
$\exists \inf(K)$

Behauptung: $\left.\begin{array}{l} \sup(K) \in K \\ (\inf(K) \in K) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Übung}}$

$\sup(K) = \operatorname{Max}(K)$
$\inf(K) = \operatorname{Min}(K)$

Zu zeigen $\underbrace{\sup(K) \in K}$ (ähnlich: $\inf(K) \in K$)

Wir beweisen $(a_n) \in K$: $a_n \to \sup(K)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sup(K) - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke

$\Rightarrow \exists\, a_n \in \underline{K}$:

$$\sup(K) - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup(K)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\sup(K) \Rightarrow \sup(K) \Leftarrow \sup(K)$$

Einschnürungssatz

Satz 5.4.10 $\Rightarrow$ K abg.

$\hookrightarrow$ $\underbrace{\text{Lemma 5.4.4}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\sup(K) \in \underline{K}}$

Definition 5.4.6
Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, falls es *keine* Teilmengen U_1 und U_2 von D gibt, sodass

- U_1 und U_2 offen in D sind (siehe Definition 5.4.3);
- $D = U_1 \cup U_2$;
- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$;
- $U_1 \neq \emptyset$ und $U_2 \neq \emptyset$.

D ist <u>nicht</u> zusammenhängend, falls

$\exists\, V_1, V_2$ $\quad V_i$ offen in $\mathbb{R}^n$ $\quad (\underline{U_i = V_i \cap D})$

so dass

- $D \subseteq V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $V_i \cap D \neq \emptyset \quad i = 1, 2$

<u>Übung</u>: D ist nicht zusammenhängend, falls

(*) $\exists\, A_1, A_2$ <u>abgeschlossene</u> Mengen in $\mathbb{R}^n$:

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- $D \cap A_i \neq \emptyset$
- $D \subseteq A_1 \cup A_2$

(D ist nicht zusammen ...)

(**) $\exists\ A \subseteq D$ sodass

$$\emptyset \subsetneq A \subsetneq D \quad \text{und}$$

A ist <u>offen</u> und <u>abgeschlossen in D</u>

[A ist <u>abg. in D</u> $:\Longleftrightarrow \exists\ C \subseteq \mathbb{R}^n$

C abgeschlossen

$A = C \cap D$]

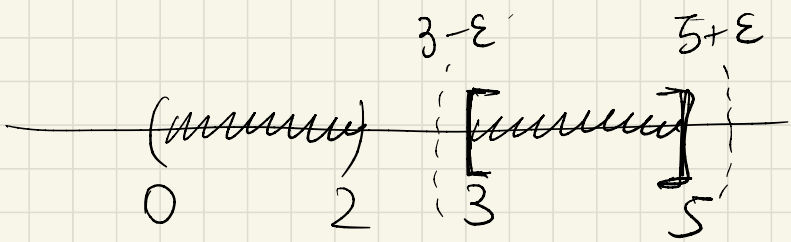
Beispiele:

(1) $\{x\}$ ist zusammenhängend

$$\left.\begin{array}{l} U_1, U_2 \subseteq \{x\} \qquad U_1 \cap U_2 = \emptyset \\ \qquad\qquad\qquad\qquad U_i \neq \emptyset \\ \qquad\qquad\qquad\qquad U_1 \cup U_2 = \{x\} \end{array}\right\}$$

(2) $D := (0,2) \cup [3,5]$

D ist nicht zusammenhängend



$$(0,2) = U_1 \qquad U_2 = \underbrace{[3,5]}_{\text{offen in } D} = \overbrace{(3-\varepsilon, 5+\varepsilon)}^{\text{offen in } \mathbb{R}} \cap D$$

(3) $\mathbb{Q}$ ist nicht zusammenhängend

$$\Big(\underbrace{(-\infty,\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}}_{\substack{\shortparallel \\ U_1}}\Big)\cup\Big(\underbrace{(\sqrt{2},+\infty)\cap\mathbb{Q}}_{U_2}\Big)=\mathbb{Q}$$

Satz 5.4.13

$I\subseteq\mathbb{R}$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ I Intervall

I: $(-\infty,a)$ $\quad a\in\mathbb{R}$

$(-\infty,a]$ $\quad a\in\mathbb{R}$

$(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]$ $\quad \underbrace{a\leq b}$

$a=b$ $[a,b]=\{a\}$

$(a,+\infty)$

$[a,+\infty)$

$\mathbb{R}$

(Eigenschaft: $\forall x,y\in I\Rightarrow[x,y]\subseteq I$)

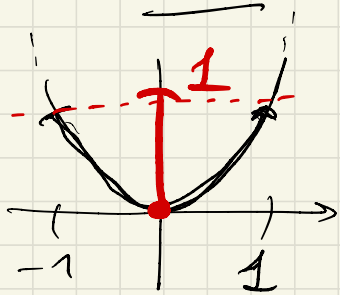
5.5 Stetige Funktionen und Topologische Konsequenzen

Welche Topologischen Eigenschaften werden durch eine <u>stetige</u> Funktion "erhalten"?

Zum Beispiel, gegeben eine stetige $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

(1) $\mathcal{U}$ offen $\subseteq \mathbb{R}^n$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f(\mathcal{U})$ offen : <u>Nein</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



$(-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ offen

$f((-1,1)) = \underbrace{[0, 1)}$ → nicht offen in $\mathbb{R}$

Aber $[0,1)$ ist offen im $f(\mathbb{R})$

$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

Ist es wahr, $f(\mathcal{U})$ offen im $f(\mathbb{R})$?

<u>Nein</u>

(2) A abgeschlossen $\subseteq \mathbb{R}^n$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ <u>abgeschlossen</u>

<u>Nein</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x$

(Übung : f stetig)

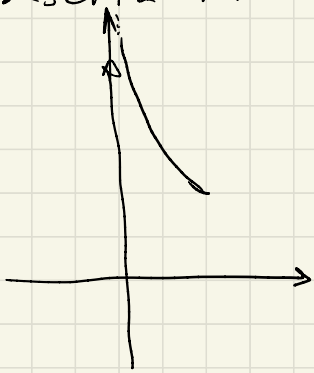
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x},\ x > 0\}$$

$f(A) = (0, +\infty)$ nicht abg. in $\mathbb{R}$

(3) A beschränkt $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ beschränkt

Nein

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$



$f((0,1)) = (1, +\infty)$

Satz 5.5.1
Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine stetige Funktion und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $f(K)$ kompakt.

<u>Beweis</u>

Zu zeigen $f(K)$ kompakt:

- $(b_n)_n \subseteq f(K)$ (*)

Zu zeigen: $\exists\ (b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : b_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} b \in f(K)$

$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists\, a_n \in K : f(a_n) = b_n$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$, K kompakt

$\Rightarrow \exists\ (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a \in K$

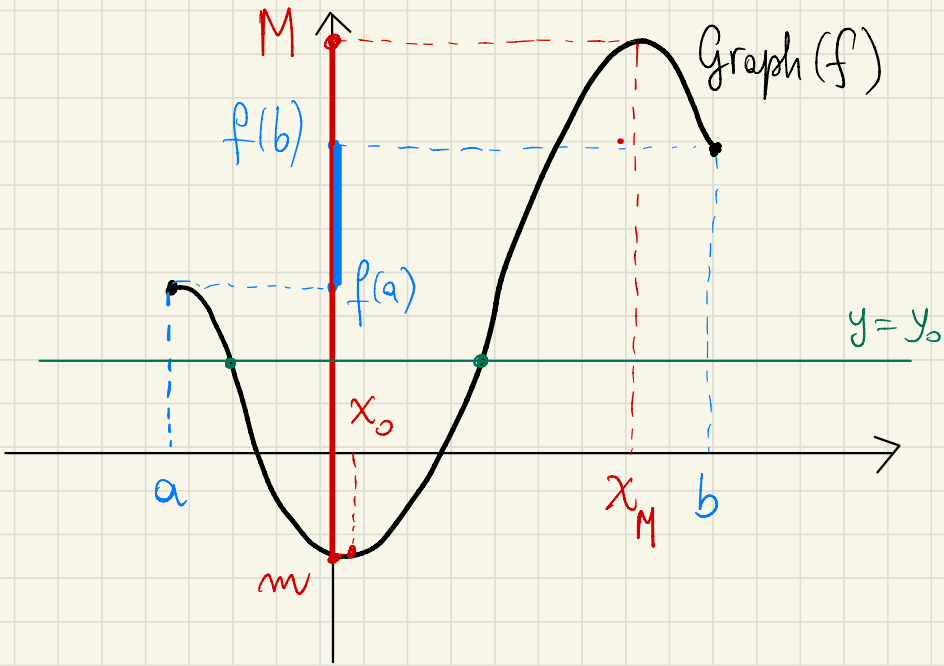
$\Rightarrow \underbrace{f(a_{n_k})}_{b_{n_k}} \longrightarrow \underbrace{f(a)}_{\in f(K)} =: b$

Satz 5.2.1 | $\blacksquare$

Existenz von Minima und Maxima

Definition 5.5.1
Es sei $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion (nicht unbedingt stetig). Wir sagen, dass f an x_0 ein **Minimum** (bzw. **Maximum**) hat, falls $f(x_0) \leq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \geq f(x)$) für alle $x \in D$.

$$f([a,b]) = [m, M]$$



$$f(x_0) = m \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Korollar 5.5.2
Es sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann besitzt f ein Maximum und ein Minimum.

Bmk: Wir brauchen, dass K kompakt ist

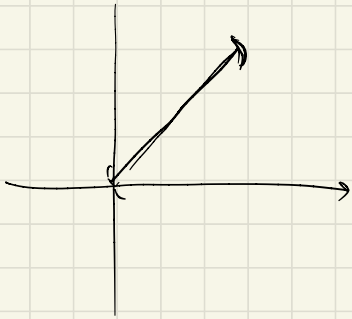
$$\exists\, x_0 \in K : f(x_0) \geq f(x) \;\forall x \in K$$
$$\leq$$

* Falls K nicht abg. ist (aber beschränkt)

$f : (0,1) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x$

$f(\underbrace{(0,1)}) = (0,1) \qquad 0 = \inf((0,1))$

$\nexists\, x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$



* Falls K nicht beschränkt (K abg.)

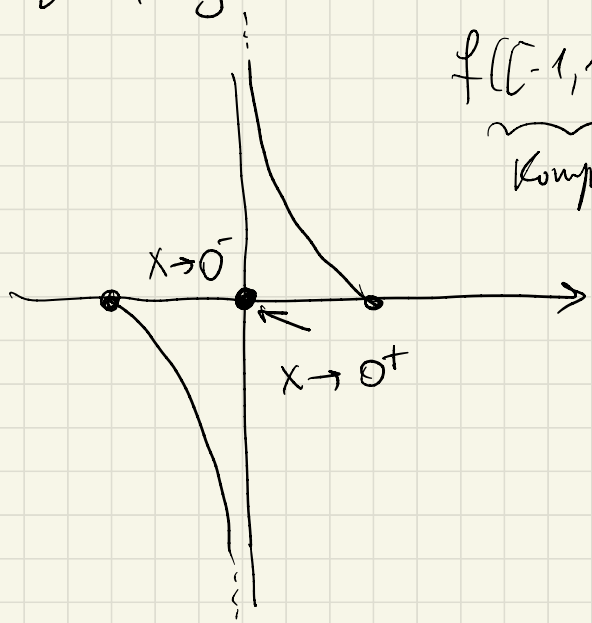
$$f: \underbrace{[0,+\infty)}_{\substack{\text{unbeschränkt} \\ (\text{abg.})}} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x$$

$f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$ besitzt kein Maximum

<u>Bmk</u>: f muss <u>stetig</u> sein

$$f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\underbrace{[-1,1]}_{\text{Kompakt}}) = (-\infty,+\infty)$$



Beweis

K kompakt $\overset{\text{Satz 5.5.1}}{\Longrightarrow}$ $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist

(Satz 5.4.12: Kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen Max und Min)

$\Longrightarrow$ $\underline{f(K)}$ besitzt $\underline{\text{Max}}$ und $\underline{\text{Min}}$

$\rightsquigarrow$ $M = \text{Max}(f(K))$

$m = \text{Min}(f(K))$

$\blacksquare$

Satz 5.5.3
Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine stetige Funktion und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist $f(D)$ zusammenhängend.

(der Zusammenhang wird durch Stetigkeit erhalten...)

<u>Beweis</u> Indirekter Beweis:

$f(D)$ nicht zusam. $\Rightarrow D$ nicht zusam.

$f(D)$ nicht zusam. $\Leftrightarrow \exists\, U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}\ (/\mathbb{C})$

U_i offen in $\mathbb{R}\ (/\mathbb{C})$

$U_i \cap f(D) \neq \emptyset \quad i = 1, 2$

$U_i \cap U_2 = \emptyset$

$\underbrace{f(D)} \subseteq \underbrace{U_1 \cup U_2}$

$\tilde{U}_i := f^{-1}(U_i) \xRightarrow[\text{stetig. von } f]{} \tilde{U}_i$ offen in $\mathbb{R}^n$

Satz 5.4.7

$D \subseteq f^{-1}(f(D)) \subseteq f^{-1}(U_1 \cup U_2)$

$$D \subseteq f^{-1}(f(D)) \subseteq f^{-1}(U_1 \cup U_2) =$$

$$= f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$$

$$= \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$$

(f Funktion)

$$D \cap \tilde{U}_i \neq \emptyset \quad (\text{weil } U_i \cap f(D) \neq \emptyset)$$

Übung

$\Rightarrow$ D nicht zusammenhängend

$\blacksquare$

Bmk: (*) $[a,b]$ ist kompakt, weil abg. & beschränkt
(Satz 5.4.9 - Bolzano-Weierstraß)

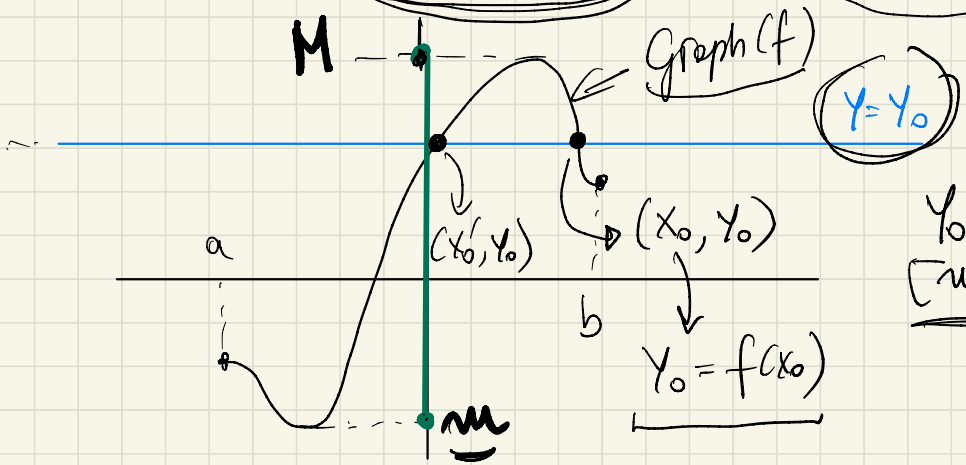
(*) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig
$f([a,b])$ kompakt $\to$ besitzt **Max** M & **Min** m

$$\boxed{\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M}$$

Aber: gegeben $y \in [m, M]$, gibt es immer eine Lösung:

$f(x) = y_0$

$f([a,b]) = [m, M]$



$y_0 = f(x_0)$

$y_0 \in [m, M]$

Korollar 5.5.4
*(**Zwischenwertsatz**) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen dem Minimum m und dem Maximum M an, also:*

Für alle (feste) $y \in [m, M]$, gibt es (mindestens) eine Lösung $x_0 \in [a,b]$ der Gleichung $f(x) = y$.

Mit anderen Worten, ist

$$f([a,b]) = [m, M]\,.$$

Beweis

* $[a,b]$ Intervall $\underset{\text{Satz 5.4.13}}{\Longrightarrow}$ $[a,b]$ zusammenhäng.

$[a,b]$ zusam. $\underset{\text{Satz. 5.5.3}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{f([a,b])}_{\subseteq \mathbb{R}}$ zusamm. $\Rightarrow$

$\underset{\text{Satz 5.4.13}}{\Longrightarrow}$ $f([a,b])$ ein Intervall

* $[a,b]$ Kompakt (B.W.) $\overset{\text{Satz 5.5.1}}{\Longrightarrow}$ $f([a,b])$ Kompakt

Also: $f([a,b])$ ist ein Kompaktes Intervall $\Rightarrow$ $[c,d] = f([a,b])$

$\star$ f nimmt ein Minimum m & Maxim. M $\Bigg\} \Rightarrow$

$c = m$

$d = M$

$$\underbrace{f([a,b]) = [m, M]}$$

$\blacksquare$